

复分形的逃逸时间算法原理及其 GSP 实现

重庆市万州第二高级中学 向忠

在复平面上，简单的二次函数 $f(z)=z^2+c$ 的迭代非常奇妙，对于不同的复数 c 的值 ($|c|<2$, $c\neq 0$)，由点 z 可以生成各种不同的美丽分形，这些分形通常称为 Julia 集；而对于同一点 z ，根据不同的 c 的值生成的分形称为 Mandelbrot 集。

一、复分形的逃逸时间算法原理

对于任意点 z_0 ，由迭代 $z\rightarrow f(z)$ 生成的迭代点列 $f(z_0)$ 、 $f(f(z_0))$ 、... 的模可能趋于 ∞ 。在这样的点处，分形图将会出现空洞，使分形的边界模糊不清。为使分形图清晰漂亮，常采用逃逸时间算法：

设置一个逃逸边界(或称为阈边界，通常设为圆 $|z|=2$)，假设有一个充分大的整数 N ，当点 z_0 经过小于 N 次迭代就超出了边界，我们就认为点 z_0 逃逸出去了；而如果经过 N 次迭代后点 z_0 仍未逃逸出去，我们就认为点 z_0 属于收敛域 A 。用这样的方法，描绘出 A 的边界图形，这便是逃逸时间算法的基本思想。

二、复分形的几何画板实现方法与步骤

1. 打开几何画板，在编辑\参数选项中设置角度为弧度；
2. 作点 z 、 c 的横纵坐标：新建参数 xz 、 yz 、 xc 、 yc ；计算 z 的模方 $\|z\|^2 = xz*xz + yz*yz$ ；
3. 计算阈判断真值 $p = \text{sgn}(1 - \text{sgn}(\|z\|^2 - 4))$ ；
4. 计算点 z 在迭代 $z\rightarrow f(z)=z^2+c$ 下的象点 Z 的横纵坐标：

$$xZ=xz*xz-yz*yz+xc、yZ=2xz*yz+yc;$$

5.构建点 z 的逃逸变换点 Z' ，即若点 z 在逃逸阈内，则 $p=1$ ，点 z 变换为点 Z' ；否则 $p=0$ ，点 z 停止于 z ：计算 $xZ'=xz+p*(xZ-xz)$ 、 $yZ'=yz+p*(yZ-yz)$ ；

6.为记录逃逸时间，新建参数 $t_0=0$ ，计算 t_0+p ；作射线 k ，在射线 k 上分别绘制点值为 t_0 的点 T 和点值为 $\|z\|$ 的点 M

7.新建 $n=3$ ，作 $\{xz、yz、t_0\} \rightarrow \{xZ'、yZ'、t_0+p\}$ 的深度为 n 的迭代，作点 T 和 M 的迭代象终点 $eT、eM$ ，并度量它们在射线 k 上的点值 et 和 em ；

8.计算 RGB 着色参数: 计算 $s=.05(et-\log(.5abs(\ln(em))))$, $R=\sin(s)$, $G=\sin(3s)$, $B=\cos(2s)$ ；

9.作点 $pixel$ ，度量其横纵坐标 $x_{pixel}、y_{pixel}$ ；对点 $pixel$ 进行 RGB 着色并作颜色变换。

10.编辑 $xz=0.15x_{pixel}、yz=0.15y_{pixel}$ ，适当设置 xc 和 yc 可扫描 J 集(左图 $c=-0.803-0.0177i$, $n=250$, s 中系数为 0.017)；编辑 $xz=0、yz=0$, $xc=0.2x_{pixel}、yc=0.2y_{pixel}$ 可扫描 M 集(右图 $n=30$, s 中系数为 0.05)。

